

den Koeffizienten der BOGOLJUBOW-Transformation (3) zu berechnen. Die Gleichungssysteme (8 a) und (8 b) liefern beide die Funktion φ . Damit kein innerer Widerspruch entsteht, müssen die beiden Lösungen identisch sein.

Identität der beiden Lösungen

Wir bezeichnen die Lösung des Systems (8 a) mit $\varphi^{(1)}$, die von (8 b) mit $\varphi^{(2)}$. Multiplikationen von (8 a) mit $\bar{u}_{p'f}$, Summation über f und analoge Operationen bei (8 b) liefern

$$\begin{aligned} \sum_{ff} u_{pf} \bar{u}_{p'f} \varphi^{(1)}(f) + \sum_f v_{pf} \bar{u}_{p'f} &= 0, \\ \sum_{ff} u_{pf} \bar{u}_{p'f} \varphi^{(2)}(f) - \sum_f u_{pf} \bar{v}_{p'f} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Wir benutzen nun die folgenden Vertauschungsrela-

tionen für die α -Operatoren.

$$\{\alpha_{p\uparrow}, \alpha_{p'\downarrow}\} = \sum_f u_{pf} \bar{v}_{p'f} + \sum_f v_{pf} \bar{u}_{p'f} = 0. \quad (10)$$

$$\text{Für die Differenz } \varphi^{(1)}(f) - \varphi^{(2)}(f) = \chi(f) \quad (11)$$

$$\text{ergibt sich dann } \sum_{ff} u_{pf} \chi(f) \bar{u}_{p'f} = 0. \quad (12)$$

In Matrixschreibweise erhalten wir

$$\text{In Matrixschreibweise erhalten wir } U X \bar{U}^T = 0. \quad (13)$$

Dabei haben wir die Matrizen $U = (u_{pf})$, $X = (\chi(f))$ und $\bar{U} = (\bar{u}_{p'f})$ eingeführt. Die Matrizen U und \bar{U}^T haben Reziproke, da die Determinanten $|u_{pf}|$ und $|\bar{u}_{p'f}|$ nicht verschwinden dürfen (s. o.). Wir multiplizieren (13) von links und rechts mit den entsprechenden reziproken Matrizen und erhalten

$$X = 0,$$

womit die Identität der beiden Lösungen bewiesen ist.

Beiträge der Mehrquantenaustauschterme zur Coulomb-Korrektur im Verhältnis des totalen (e, \mathcal{N})- zum totalen (γ , \mathcal{N})-Wirkungsquerschnitt

Von RUDOLF RODENBERG

Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen
(Z. Naturforsch. 16 a, 1242—1243 [1961]; eingeg. am 16. Oktober 1961)

In einer früheren Arbeit¹ (weiterhin mit I bezeichnet) wurde das Verhältnis des totalen (e, \mathcal{N})- zum totalen (γ , \mathcal{N})-Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung für elektrische (E1) und magnetische (M1) Dipolübergänge abgeleitet (I.29, I.30) in erster nichtverschwindender Näherung des S-Matrixformalismus. Bei Verwendung der relativistischen COULOMB-Eigenfunktionen für das kontinuierliche Spektrum, wie sie von SOMMERFELD-MAUE² und BETHE-MAXIMON³ benutzt wurden (I.22), erhält man das COULOMB-korrigierte Spektrum für E1-Übergänge in der Form (I.44):

$$R_{(1)}^{E1} = \alpha C_1 \left(1 + \alpha^2 Z^2 \frac{B_0}{A_0} + \alpha^4 Z^4 \frac{B_1}{A_1} + \dots \right). \quad (1)$$

Gefragt ist nun nach dem Beitrag der höheren Näherungen in $\alpha = e^2 = 1/137$; ($\hbar = c = 1$) — in Bornscher Näherung berechnet — zu den einzelnen Entwicklungsgliedern der COULOMB-Korrektur in jeder störungstheoretischen Näherung. In einer früheren Arbeit⁴ wurde gezeigt, daß die 2. Näherung im S-Matrixformalismus ein $R_{(2)}^{E1} = \alpha^2 C_2$ liefert und dieser Beitrag in dem 1. Entwicklungsglied der COULOMB-Korrektur (1) zu $|C_2 A_0/B_0| = 1,3\%$ enthalten ist für Elektronenener-

gien E_1 zwischen $10 \leq E_1 \leq 300$ MeV. Für höhere Energien E_1 überwiegen elektromagnetische und mesonische Korrekturen des Nukleons die Zweiquantenaustauschbeiträge.

Das Verhalten der Mehrquantenaustauschterme in Bornscher Näherung zu den einzelnen Entwicklungsgliedern der COULOMB-Korrektur in jeder störungstheoretischen Näherung soll nun allgemein angegeben werden.

In Bornscher Näherung hat man bis zur n -ten störungstheoretischen Näherung

$$R_{B.N.}^{E1(1)} = \alpha C_1; \quad R_{B.N.}^{E1(2)} = \alpha^2 C^2 \dots,$$

$$\text{allgemein } \sum_{n=1}^{\infty} R_{B.N.}^{E1(n)} = \sum_1^{\infty} \delta_n = \sum_1^{\infty} \alpha^n C_n. \quad (2)$$

Bei Benutzung der relativistischen COULOMB-Eigenfunktionen hat man (I.44 etc.)

$$\begin{aligned} R_{(1)}^{E1} &= \alpha C_1 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i-1}}{A_{i-1}} \alpha^{2i} Z^{2i} \right), \\ R_{(2)}^{E1} &= \alpha^2 C_2 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B'_{i-1}}{A'_{i-1}} \alpha^{2i} Z^{2i} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

allgemein mit

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{B_{i-1}}{A_{i-1}} Z^{2i}; & \sum_i g_i \alpha^{2i} &= \sum_i g_i \alpha^{2i} \sum_i Q_i^{(1)}, \\ & & \sum_i g'_i \alpha^{2i} &= \sum_i g_i \alpha^{2i} \sum_i Q_i^{(2)}, \\ \sum_i Q_i^{(1)} &= 1; & \sum_i g''_i \alpha^{2i} &= \sum_i g_i \alpha^{2i} \sum_i Q_i^{(3)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_n R_{(n)}^{E1} = \sum_n \gamma_n = \sum_n \delta_n + \sum_i g_i \alpha^{2i} \cdot \left[\sum_n \left(\alpha^n C_n \sum_i Q_i^{(n)} \right) \right].$$

¹ R. RODENBERG, Z. Phys. 158, 44 [1960].

² A. SOMMERFELD u. A. W. MAUE, Ann. Phys., Lpz. 22, 629 [1935].

³ H. A. BETHE u. L. C. MAXIMON, Phys. Rev. 93, 768 [1954].

⁴ R. RODENBERG, Proc. Rutherford Jub. Int. Conference, Sept. 1961.



Dann ist nach (4) mit $\tilde{g}_i = g_i/C_{2i}$; $\eta_n = \sum_i \varrho_i^{(n)}$ und $\alpha^n C_n = \delta_n$

$$\sum_n \chi_n = \left| \frac{\sum_n \gamma_n - \sum_n \delta_n}{\sum_n \delta_n} \right| = \frac{\sum_i \tilde{g}_i \delta_{2i} \sum_n \delta_n \eta_n}{\sum_n \delta_n} \quad (5)$$

Nach CAUCHYScher Multiplikation

$$\sum_n \delta_n \eta_n = \sum_n \delta_n \sum_n \tilde{\eta}_n \quad \text{mit} \quad \tilde{\eta}_n = a_n \eta_n$$

$$\text{ergibt sich} \quad \sum_n \chi_n = \sum_i \tilde{g}_i \delta_{2i} \sum_n \tilde{\eta}_n, \quad (6)$$

wobei die a_n sich nach der CAUCHYSchen Multiplikationsregel und durch Koeffizientenvergleich bestimmen lassen.

Bei \tilde{g}_i , δ_{2i} und $\tilde{\eta}_n \sim \sum_i \varrho_i^{(n)}$ steht der Faktor α^{2i} .

Daher setzen wir den Summationsindex $i=n$ und damit folgt aus (6)

$$\sum_n \chi_n = \sum_n \tilde{g}_n \hat{\eta}_n \delta_{2n} \quad (7)$$

mit $\hat{\eta}_n = b_n \tilde{\eta}_n$. Für die b_n gilt dasselbe in (7) wie für die a_n in (6).

Dann ist der Beitrag λ_{2n} der 2n-ten Näherung im S-Matrixformalismus zum n-ten Entwicklungsglied in der COULOMB-Korrektur – wieder in der n-ten störungstheoretischen Näherung berechnet – gegeben durch

$$\lambda_{2n} = \left| \frac{1}{\tilde{g}_n \hat{\eta}_n} \right|. \quad (8)$$

Gl. (8) liefert für $n=1$ ein $\lambda_2 = |C_2 A_0/B_0| = 1,3\%$ für festes Z (s. Anm. 4). Im Energiebereich $10 \leq E_1 \leq 300$ MeV (für höhere Energien E_1 spielen die Mehrquantenaustauschterme keine Rolle mehr gegenüber den elektromagnetischen und mesonischen Korrekturen des

Nukleons) zeigt sich, daß die λ_{2n} bis zu $n=3$ eine fallende und beschränkte Folge bilden und näherungsweise gilt

$$1,3\% \geq \lambda_2 > \lambda_4 > \lambda_6 > 10^{-6}\% \quad (9)$$

Sei λ_{2n}^σ der Beitrag der 2n-ten Näherung im S-Matrixformalismus zum n-ten Entwicklungsglied in der COULOMB-Korrektur – jetzt in der σ -ten Näherung der Störungstheorie berechnet – so ist:

$$\lambda_{2n}^\sigma = \left| \frac{C_{2n}}{g_n^\sigma \hat{\eta}_n^\sigma} \right|; \quad \sigma = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Für $\sigma=n$ folgt Gl. (8).

Es zeigt sich, daß die λ_{2n}^σ auch eine fallende und beschränkte Folge bilden, die bis zu $n=3$, $\sigma=3$ verläuft wie

$$1,3\% \geq \lambda_2^1 > \lambda_4^1 > \lambda_6^1 > \lambda_2^2 > \lambda_4^2 > \lambda_6^2 > \lambda_2^3 > \lambda_4^3 > \lambda_6^3 > 10^{-6}\% \quad (11)$$

Für $n=\sigma$ ergibt sich auch die richtige Reihenfolge (9). Für größere n und σ hat (11) nicht mehr die obige symmetrische Form. Es zeigt sich, daß die Konvergenz bis zu $n=3$, $\sigma=3$ der λ_{2n}^σ für festes σ ($n \geq \sigma$) schwächer ist als die der λ_{2n}^n in (9).

Es genügt offenbar, wenn man an die gleichmäßige und absolute Konvergenz der hier beteiligten Reihen für $n > 3$ und $\sigma > 3$ glaubt (bis zu $n=2$, $\sigma=2$ wird das Experiment bereits hinreichend gut beschrieben, siehe 1 und 5), Gl. (2) und (3) nur für $n=1$ für alle inelastischen Elektronenstreuprozesse zu benutzen. Die Mehrquantenaustauschterme sind demnach gegenüber den anderen bereits genannten Korrekturen zu vernachlässigen 6.

⁵ R. RODENBERG, Z. Phys. **162**, 347 [1961].

⁶ S. D. DRELL u. S. FUBINI, Phys. Rev. **113**, 741 [1959].

Note on the Introduction of Form Factors in the Theory of (e, \mathcal{N})-processes

By RUDOLF RODENBERG

Institute for Theoretical Physics, University of Tübingen
(Z. Naturforsch. **16 a**, 1243–1244 [1961]; eingeg. am 23. Oktober 1961)

In former papers ^{1, 2} (I, II) the ratio of the total and differential (e, \mathcal{N})- to the total (γ , \mathcal{N})-cross section respectively have been derived in (I.23) for the point nucleus, and in (I.25) for the finite nuclear size. In this note we wish to indicate that the general interaction HAMILTONIAN (I.8) and the general expression derived for the matrix elements for the (e, \mathcal{N})-process

in the first nonvanishing order of S-matrix formalism, given for a special case in (I.25). For that simple case – $\sigma_{e, \mathcal{N}}$ – the recoil-term neglected – like the interaction LAGRANGIAN-density with inclusion of the FOLDY-term ³, that gives for the elastic electron-nucleon scattering process the generalized ROSENBLUTH formula ⁴. The anomalous magnetic moments of the nucleons are introduced in (I.8), and the higher approximations, arising from the expression L_{int} introduced by FOLDY ³ and SALZMAN ⁵, are included in the expression $\varrho(L, \tau)$ in I, given for a special case in (I.25). For that simple case E1-transitions only – we have derived in (II.9) the form factor $\tilde{F}_1(q^2)$ for elastic electron nucleon scattering. So one can use the results in I and II – the general expres-

¹ R. RODENBERG, Z. Phys. **158**, 44 [1960].

² R. RODENBERG, Z. Phys. **162**, 347 [1961].

³ L. L. FOLDY, Phys. Rev. **87**, 688 [1952].

⁴ M. N. ROSENBLUTH, Phys. Rev. **79**, 619 [1950].

⁵ G. SALZMAN, Phys. Rev. **99**, 973 [1955].

⁶ R. HERMAN and R. HOFSTADTER, High-Energy Electron Scattering Tables, Stanford University Press, Stanford, Calif. 1960.